Alumno____ nº matrícula: ☐☐☐☐☐

NORMAS DEL EXAMEN: 1) Cada ejercicio debe resolverse *en la hoja del enunciado*: no se admiten hojas adicionales. 2) Debe escribirse con tinta azul o negra: no se admite escritura a lápiz ni en color rojo. 3) El DNI del alumno debe estar a la vista sobre la mesa. 4) No está permitido levantarse ni hablar hasta que se hayan recogido los últimos ejercicios y se salga del aula de examen. 5) Se puede disponer sólo del Formulario oficial de la asignatura (sin informaciones adicionales de ningún tipo) y del papel en blanco para uso como borrador. 6) No se hacen aclaraciones.

Ejercicio nº 3.- Cuestión: Defina superficie reglada y superficie desarrollable. [2 puntos]
Problema: Sea S la superficie de revolución obtenida al hacer girar la curva $\{x = 0,\ y = \cosh t,\ z = t\}$ alrededor del eje Z.

1) Obtener una parametrización de S. [2 puntos]

2) Obtener la primera y segunda formas fundamentales de S. [3 puntos]

3) Calcular la curvatura de Gauss y la curvatura media. Clasificar los puntos de la superficie S según los valores de la curvatura de Gauss. [3 puntos]

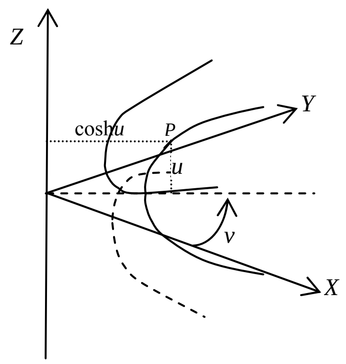
Solución: Cuestión: i) Una superficie S en $\mathbb{E}_3$ se dice *reglada* cuando se puede generar a partir de una curva $D \subset S$, llamada *directriz*, por cada uno de cuyos puntos pasa un segmento de recta (que puede ser de longitud infinita) $G \subset S$, llamado *generatriz* o *regla* de la superficie. Así, S admite una parametrización de la forma

$$\underline{r}(u,v) = \underline{d}(u) + v\underline{g}(u)$$

llamada, *parametrización reglada*, donde: $\underline{d}(u)$ es el vector posición de los puntos de la curva *directriz*, $\underline{g}(u)$ es un vector generador del segmento *generatriz* correspondiente al punto de la directriz y v es el parámetro afín que determina el punto en cada regla o generatriz.

ii) La superficie reglada es *desarrollable* (en el sentido de la Geometría Descriptiva) si el plano tangente a S es común a los puntos de cada generatriz rectilínea. Analíticamente, basta que el vector normal a S en cada punto, $\underline{N}(u,v)$, sólo dependa de u, o, equivalentemente, que $\underline{g}_u \times \underline{g}_v$ no dependa de v.

Problema: 1) Para parametrizar una superficie de revolución alrededor del eje Z, lo estándar es tomar una coordenadas cilíndricas de eje Z y usar como parámetro v la segunda coordenada cilíndrica, θ, que indica el ángulo de revolución, mientras que el parámetro u se escoge buscando describir la generatriz de un modo sencillo. En este caso, la generatriz se da parametrizada en el plano ZY, de un modo que es equivalente con el siguiente: $\{x = 0,\ y = \cosh z\}$, porlo que tomamos como parámetro u la coordenada z. Para que v sea la coordenada cilíndrica θ tomamos como posición inicial de la generatriz la que está contenida en el plano ZX, sin que esto altere a la superficie resultante, que será:



$$\{\rho = \cosh u,\ \theta = v,\ z = u;\ u\in\mathbf{R},\ v\in[0\ ,\ 2\pi[\ \}$$

o, en cartesianas:

$$\boxed{\{x = \cosh u \cos v,\ y = \cosh u \operatorname{sen} v,\ z = u\}} \qquad (1)$$

[Nota: Puede tomarse como posición inicial la generatriz del plano ZY, en cuyo caso la coordenada θ sería $v+\frac{\pi}{2}$, con lo que la parametrización cartesiana cambia ligeramente, pues $\cos(v+\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen} v$ y $\operatorname{sen}(v+\frac{\pi}{2}) = \cos v$. Por eso se ha elegido la posición inicial estándar.]

2) A partir de la ecuación vectorial de S,

$$\underline{r}(u,v) = \cosh u \cos v\,\underline{i} + \cosh u \operatorname{sen} v\,\underline{j} + u\,\underline{k}$$

se obtiene la base natural de superficie:

$$\underline{g}_u = \operatorname{senh} u \cos v\ \underline{i} + \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v\ \underline{j} + \underline{k}\ ,\ \underline{g}_v = -\cosh u \operatorname{sen} v\ \underline{i} + \cosh u \cos v\ \underline{j}$$

de modo que $\underline{g}_u \times \underline{g}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \operatorname{senh} u \cos v & \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v & 1 \\ -\cosh u \operatorname{sen} v & \cosh u \cos v & 0 \end{vmatrix} = -\cosh u \cos v\ \underline{i} - \cosh u \operatorname{sen} v\ \underline{j} + \operatorname{senh} u \cosh u\ \underline{k}$

luego $\underline{N}(u,v) = \dfrac{\underline{g}_u \times \underline{g}_v}{|\underline{g}_u \times \underline{g}_v|} = \dfrac{\underline{g}_u \times \underline{g}_v}{\cosh^2 u} = \dfrac{-\cos v\,\underline{i} - \operatorname{sen} v\,\underline{j} + \operatorname{senh} u\,\underline{k}}{\cosh u}$

i) La Primera Forma de S es la asociada a la matriz de Gram de la base natural de superficie, o sea, a la matriz

$$G(u,v) = \begin{bmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{IFF:\ (ds)^2 = \cosh^2 u\,(du)^2 + \cosh^2 u (dv)^2}$$

ii) La segunda forma de S es la forma cuadrática asociada a la matriz covariante del tensor de curvatura, de elementos $K_{\alpha\beta}$ dados por $\frac{\partial \underline{g}_{u^\alpha}}{\partial u^\beta}\cdot \underline{N}$, luego necesitamos las derivadas de la base natural de S:

$\frac{\partial \underline{g}_u}{\partial u} = \cosh u \cos v \underline{i} + \cosh u \, \mathrm{sen} v \underline{j}$; $\frac{\partial \underline{g}_u}{\partial v} = \frac{\partial \underline{g}_v}{\partial u} = -\mathrm{senh} u \, \mathrm{sen} v \underline{i} + \mathrm{senh} u \cos v \underline{j}$; $\frac{\partial \underline{g}_v}{\partial v} = -\cosh u \cos v \underline{i} - \cosh u \, \mathrm{sen} v \underline{j}$

Así pues:

$$K_{11} = \frac{\partial \underline{g}_u}{\partial u} \cdot \underline{N} = \frac{\partial \underline{g}_u}{\partial u} \cdot \frac{-\cos v \underline{i} - \mathrm{sen}\, v \underline{j} + \mathrm{senh}\, u \underline{k}}{\cosh u} = -1 \ ; \ K_{12} = 0 \ ; \ K_{22} = \frac{\cosh u \cos^2 v + \cosh u \, \mathrm{sen}^2 v}{\cosh u} = 1$$

luego $[K_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{IIFF : \kappa_n = -\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2}$ #.

3) La curvatura de Gauss es el determinante del tensor de curvatura $\underline{\mathbf{K}}$, mientras que la curvatura media es su traza. Para ambas interesa la forma mixta contra-cova del tensor, o sea:

$$\left[K^{\alpha}{}_{\beta}\right] = G^{-1} \cdot \left[K_{\gamma\beta}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cosh^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 u} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\cosh^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 u} \end{bmatrix}$$

Así, $K_G = \det \underline{\mathbf{K}} = \frac{-1}{\cosh^4 u}$, $K_M = 0$

Al clasificar los puntos de *S* mediante los valores de K_G, se observa que KG <0, $\forall(u,v)$, luego rodos los puntos de *S* son puntos de tipo hiperbólico. #.